

# Fraktale : Julia- und Mandelbrotmengen

## 1. Gaston Julia und seine Entdeckung der Julia-Menge



**Abb. 1:**  
Gaston Maurice Julia, 1893 - 1978

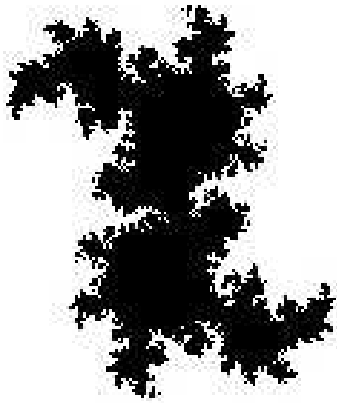
Gaston Maurice Julia wurde am 3. Februar 1893 in Sidi Bel Abbès in Algerien geboren. Er kämpfte im ersten Weltkrieg auf Seiten der Franzosen und wurde dabei schwer verletzt. Er verlor seine Nase und musste von da an einen entstellenden Lederriemen im Gesicht tragen. Er verbrachte lange Zeit im Krankenhaus und widmete sich dort in den Zeiten zwischen verschiedenen Operationen seinen mathematischen Forschungen. Julia starb am 19. März 1978 in Paris.

In seinem Werk „Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles“ (zu deutsch : „Abhandlung über die Iteration rationaler Funktionen“) befasste sich Julia mit einer komplexen Iteration  $(z_n)$ . Er beschreibt darin die Menge

$$J(c) := \{ z_0 \in \mathbb{C} : (z_n) < \infty \text{ mit } z_{n+1} := z_n^2 + c \} \quad (c \in \mathbb{C} \text{ fest}),$$

also die Menge aller komplexen Startwerte  $z_0$ , für welche die Iteration  $(z_n)$  für ein konstantes  $c \in \mathbb{C}$  stets beschränkt bleibt.

$J(c)$  weist trotz ihrer einfachen Gleichung eine sehr hohe Komplexität auf:



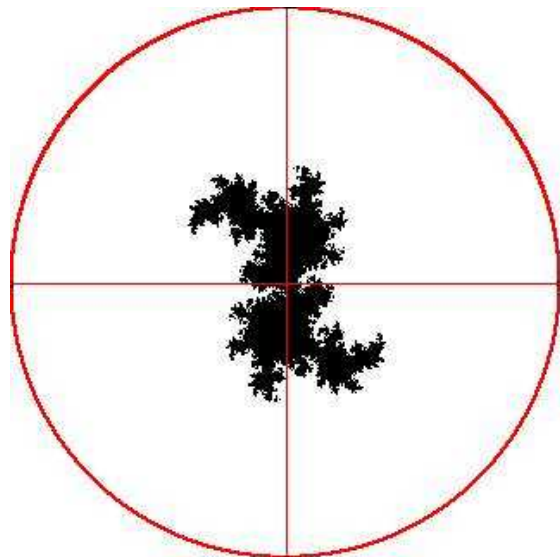
**Abb. 2:**  
**Juliamenge für**  
 $c = 0.35 + 0.35i$

Die Iteration  $(z_n)$  lässt sich an Hand eines Beispiels verdeutlichen, das dem polnischen-französischen Mathematiker Benoit Mandelbrot zugeschrieben wird:

Angenommen, es sei der modernen Biotechnologie gelungen, Flöhe gentechnisch so zu verändern, dass sie eine mathematische Begabung besäßen. Man setze einen solchen Floh auf einen beliebigen Punkt eines Tisches mit einem Radius von zwei Metern. Dieser Tisch symbolisiert die Menge der komplexen Zahlen mit einem Abstand kleiner gleich zwei vom Ursprung. Der Floh möge sich nun folgendermaßen verhalten:

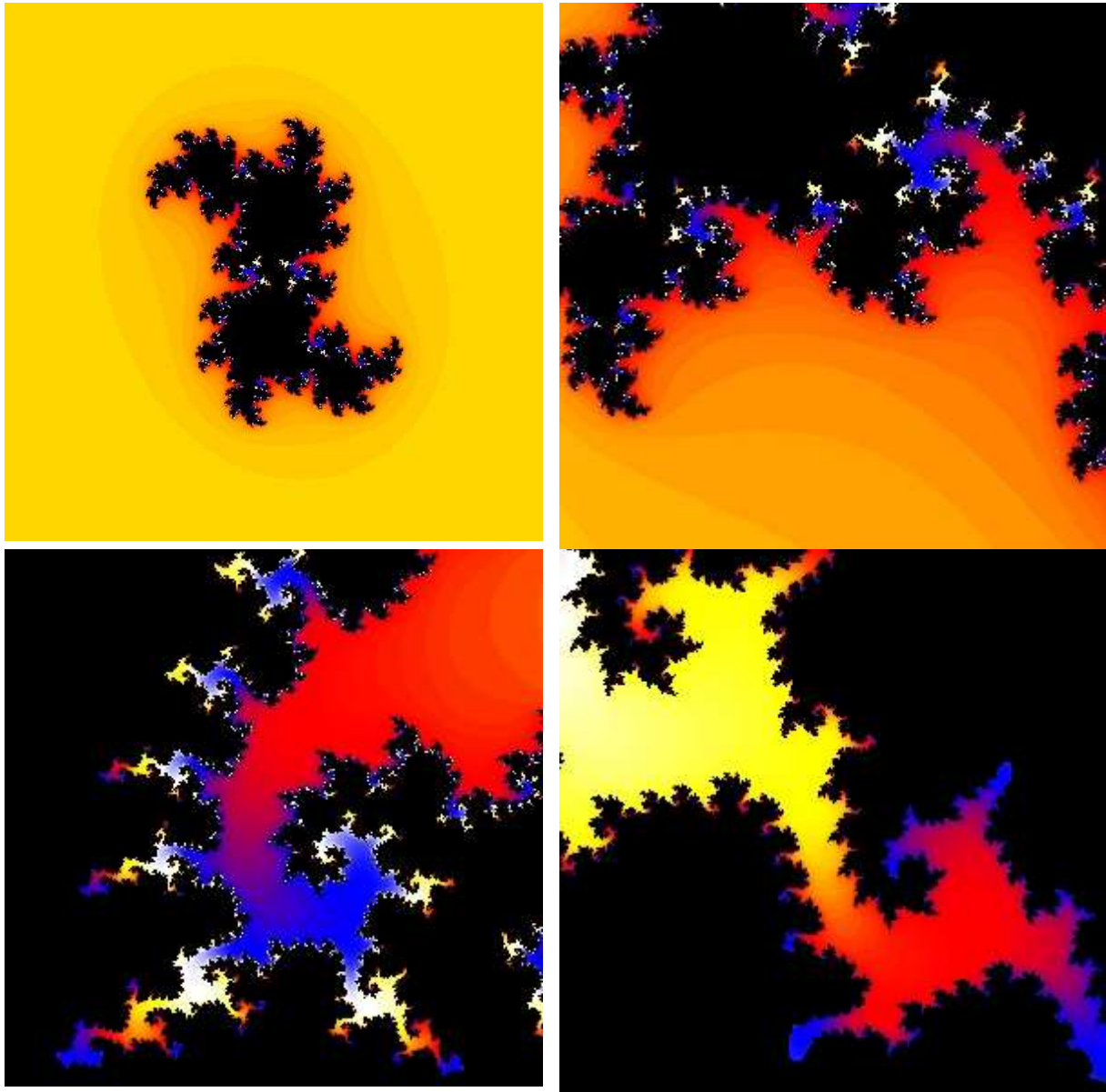
Er springe stets so, dass sich sein Abstand zum Ursprung quadriert und der Winkel, den der Floh, der Ursprung und die X-Achse einnehmen, sich verdoppelt ( $z_n^2$ ). Zum Schluss springe er noch um den konstanten Wert  $c$  zur Seite ( $z_n^2 + c$ ). Ein Punkt  $z_0$  des Tisches liegt folglich genau dann in der Juliamenge  $J(c)$ , wenn ein Floh, der auf diesen Punkt gesetzt wurde, bei seinen Sprüngen nie vom Tisch fällt.

Es reicht aus, den Tisch auf einen Radius von zwei Metern zu beschränken, da sich zeigen lässt, dass  $(z_n)$ , sobald es einmal einen Wert von  $|z_n| \geq 2$  erreicht, unbeschränkt wächst. Alle Flöhe, die vom Tisch herunterfallen, repräsentieren also einen Startwert  $z_0$ , für den die Iteration  $(z_n)$  ins Unendliche divergiert und gehören damit nicht zur Juliamenge  $J(c)$ .



**Abb. 3:**  
**Juliamenge für  $c = 0.35 + 0.35i$**   
**in einem Kreis mit Radius = 2**

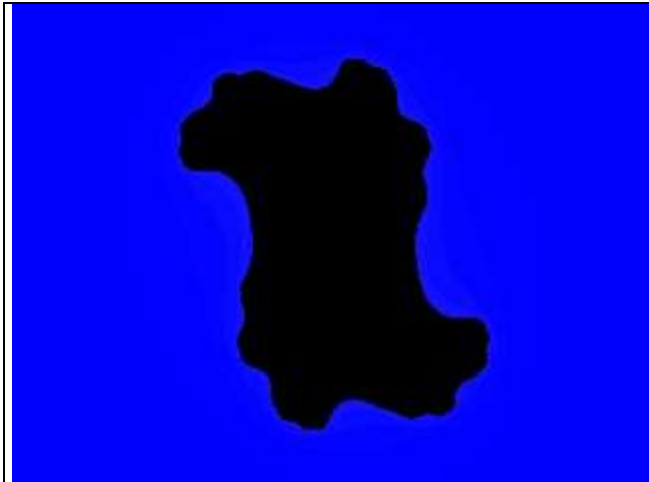
Die Schwarz-Weiß-Darstellung einer Juliamenge lässt sich interessanter und informativer gestalten, indem man farbig kodiert, nach wie vielen Sprüngen ein Floh vom Tisch fällt, also für welchen Wert von  $n$  erstmals  $|z_n| \geq 2$  wird.



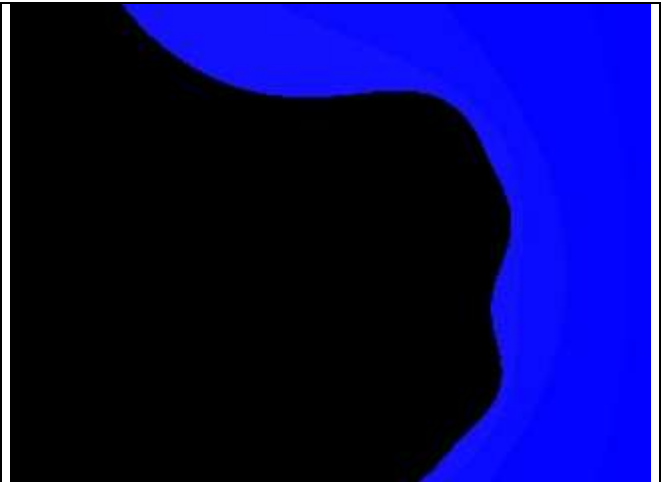
**Abb. 4-7 : Ausschnitte der Juliamenge mit  $c = 0.35 + 0.35i$**

Alternativ kann man die Farbe eines Punktes auch so wählen, dass sie Auskunft darüber gibt, nach wie vielen Sprüngen ein nie vom Tisch fallender Floh beginnt, periodisch immer dieselben Punkte anzuspringen.

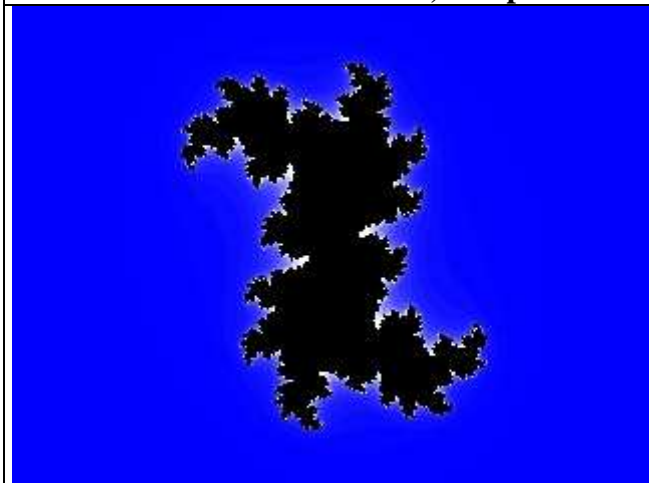
Praktisch berechnet man die Punkte einer Julia-Menge, indem man für jeden Startpunkt die Iteration sooft durchführt, bis  $|z_n| \geq 2$  ist oder eine maximale Iterationstiefe erreicht ist. Je höher die Iterationstiefe ist, desto genauer ist das Resultat:



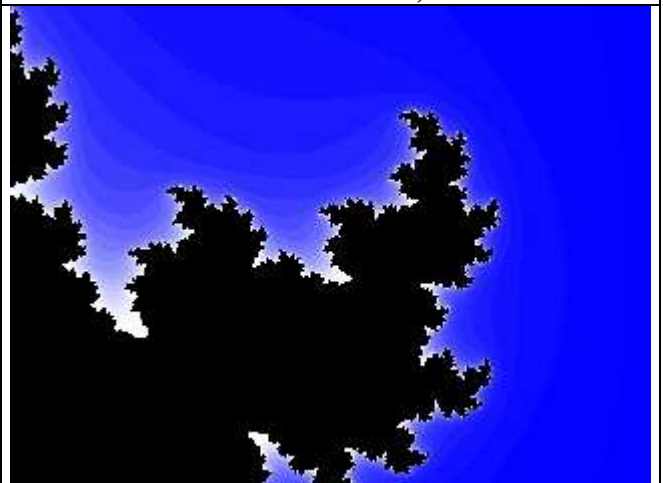
**Abb. 8 : Iterationstiefe 5, komplett**



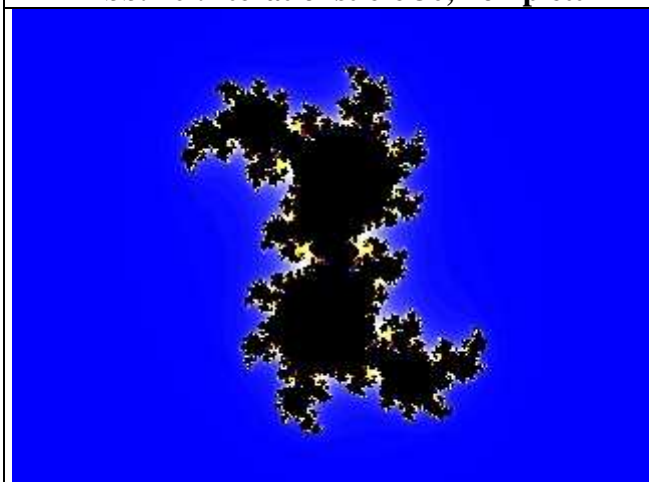
**Abb. 9 : Iterationstiefe 5, Ausschnitt**



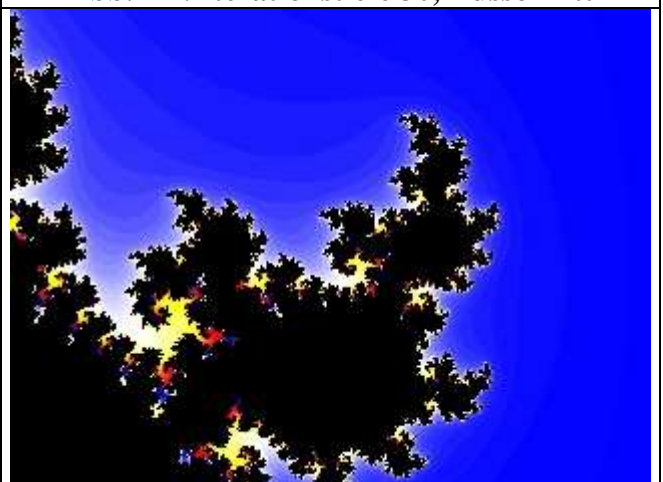
**Abb. 10 : Iterationstiefe 30, komplett**



**Abb. 11 : Iterationstiefe 30, Ausschnitt**



**Abb. 12 : Iterationstiefe 150, komplett**



**Abb. 13 : Iterationstiefe 150, Ausschnitt**

Zu jeder komplexen Zahl  $c$  gibt es eine Juliamenge, insgesamt also (überabzählbar) unendlich viele; für viele Werte von  $c$  ist diese allerdings leer. Für welche Werte von  $c$  eine Juliamenge existiert, wird im vierten Abschnitt beschrieben.

## 2. Der Begriff „Fraktal“

Eine Juliamenge lässt sich für beliebig kleine Ausschnitte berechnen, da zwischen zwei komplexen Zahlen stets unendlich viele weiteren komplexen Zahlen liegen. Praktisch gesehen kann man unendlich weit in die grafische Darstellung einer Juliamenge hineinzoomen, ohne an eine Grenze zu stoßen. Bei starker Vergrößerung entdeckt man in  $J(c)$  Bildbereiche, die der nicht-vergrößerten Darstellung der Julia-Menge sehr ähnlich oder sogar gleich sind. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Selbstähnlichkeit.

Aus mathematischer Sicht ist eine Menge selbstähnlich, wenn sie Untermengen enthält, die sich durch Rotation, Translation und Skalierung in die Obermenge transformieren lassen.

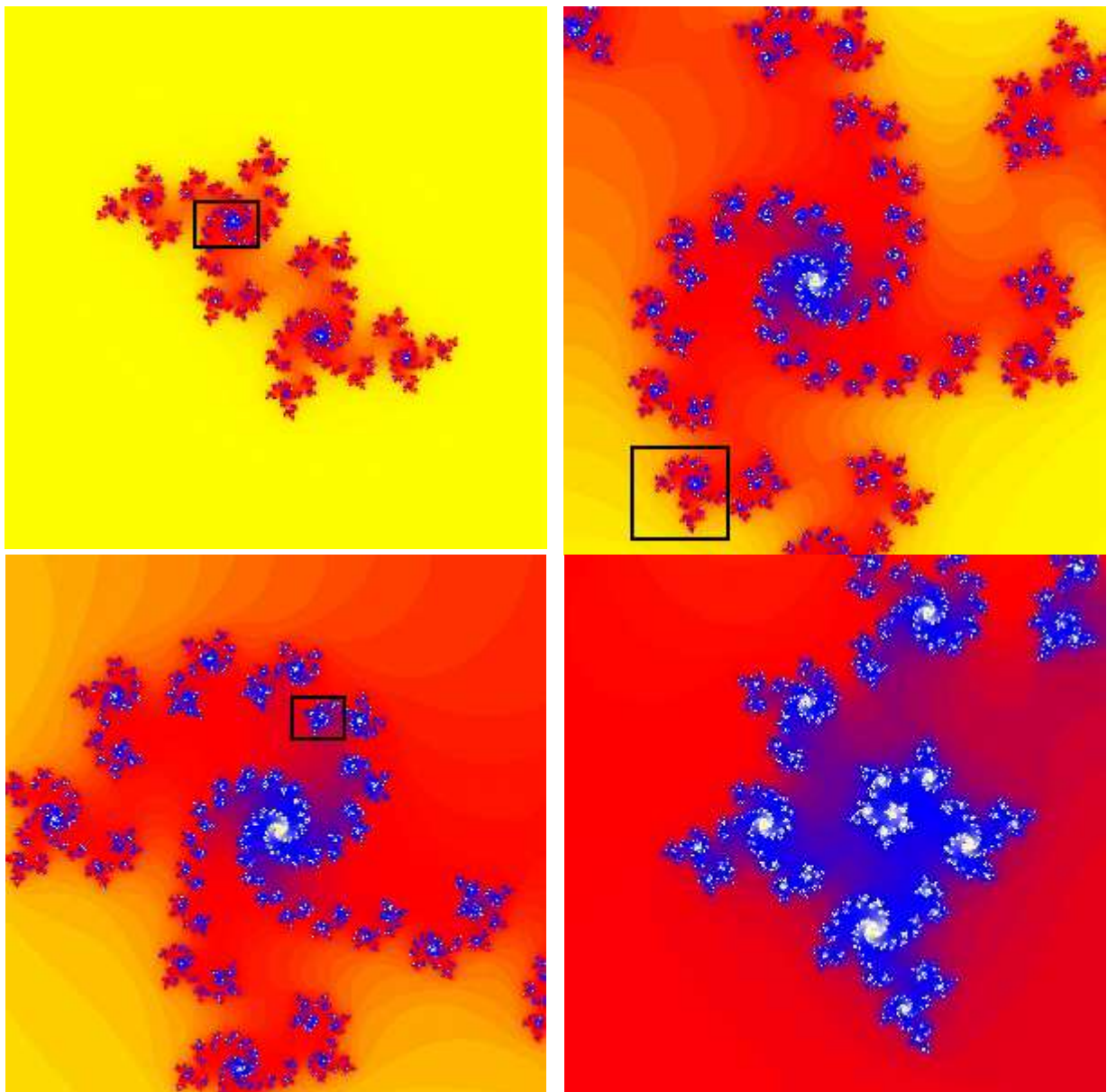


Abb. 14-17 : Ausschnitte der Juliamenge mit  $c = -0.25 + 0.7i$



**Abb. 18:**  
**ein Farnblatt**

In der Natur treten viele selbstähnliche Objekte auf: so ähneln zum Beispiel die Rispen eines Farnblatts dem kompletten Farnblatt; auch ein kleines Stück Blumenkohl sieht fast genauso aus wie ein ganzer Blumenkohlkopf.

Viele in der Natur vorkommenden Objekte lassen sich nicht ausreichend durch mathematische Begriffe wie „Kugel“ oder „Würfel“ beschreiben:

“Clouds are not spheres, mountains are not cones,  
coastlines are not circles, and bark is not smooth,  
nor does lightning travel in a straight line.”

Dieses Zitat stammt von dem in Abschnitt eins schon einmal erwähnten Mathematiker Benoit Mandelbrot.

Mandelbrot fiel auf, dass die sich Angaben zur Länge der Küstenlinie von Großbritannien stark voneinander unterschieden, hier nachdem in welchem Maßstab die Messungen durchgeführt wurden.

Vergößert man einen Ausschnitt der Küstenlinie, so werden Details wie kleinere Einbuchtungen oder Ausstülpungen sichtbar, die Küstenlinie wird also bei der Wahl eines kleineren Maßstabes länger.

Egal wie stark man auch die Vergrößerung wählt, die Abschnitte der Küstenlinie nehmen nie die Form einer Linie oder eines Kreises an, vielmehr ähneln sie Ausschnitten, die bei schwächerer Vergrößerung schon einmal zu sehen waren – die Küstenlinie ist also selbstähnlich. Die Selbstähnlichkeit ist eine Eigenschaft vieler „Fraktale“.


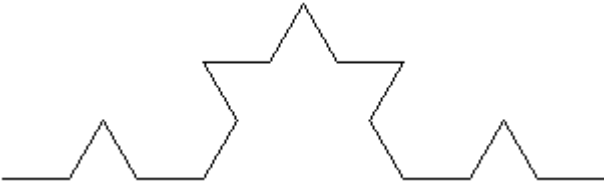

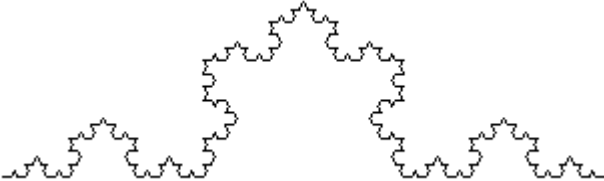

Insgesamt ist die Küstenlinie folglich ein sehr lange, vielleicht sogar unendlich lange Linie, die eine endliche Fläche einschließt – Großbritannien ist ja bekanntermaßen nicht unendlich groß. Mandelbrot wies der Küstenlinie daraufhin eine gebrochene Dimension zwischen eins und zwei zu – schließlich stellt sie eine eindimensionale Linie dar, die aber doch Eigenschaften einer zweidimensionalen Fläche besitzt.

Auch weitere Strukturen der Natur passen nicht in die herkömmlichen, ganzzahligen Dimensionen. Wolken zum Beispiel sind weit davon entfernt, quaderförmige Objekte zu sein, welche die dritte Dimension vollständig ausfüllen. Mandelbrot ordnete ihnen deswegen eine gebrochene Dimension

zwischen zwei und drei zu. Auch Bäume, Berge oder Gehirne haben gebrochene Dimensionen. Mandelbrot prägte für diese Objekte den Begriff ‚Fraktal‘, abgeleitet vom lateinischen Wort ‚fractus‘; zu deutsch ‚gebrochen‘.

Um den Begriff der fraktalen Dimension mathematisch zu definieren, möchte ich vorher noch ein weiteres Fraktal einführen: Die Koch-Kurve oder ‚Schneeflockenkurve‘:

Die Koch-Kurve entsteht bei der Anwendung des folgenden Algorithmus: Man nehme eine gerade Linie, teile sie in drei gleich große Stücke auf, entferne das mittlere Stück und ersetze es durch die zwei Schenkel eines gleichseitigen Dreiecks. Dann wiederhole man diesen Algorithmus für die vier neu entstandenen Linien und fahre so unendlich damit fort ...

Iterations-Tiefe	Koch-Kurve
1	
2	
3	
4	
5	
<p><b>Abb. 20:</b> verschiedene Iterationsstufen der Koch-Kurve</p>	

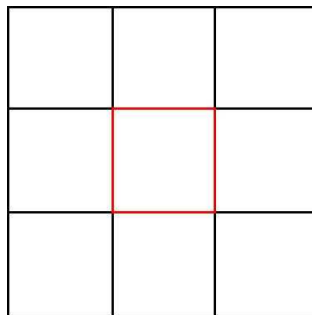
Nun zur fraktalen Dimension:

Wenn man eine gerade Linie in  $n$  gleich große Stücke zerteilt, sieht jedes der  $n$  Liniestücke aus wie die Ursprungslinie, nur um den Faktor  $n = n^{1/1}$  verkleinert.



**Abb. 21 :**  
**Eine Linie, zerteilt in  $n=3$  gleichgroße Teilstücke**

Wird ein Quadrat in  $n$  gleich große Teile zerteilt, entspricht jedes kleine Quadrat dem großen, jetzt aber um den Faktor  $\sqrt[2]{n} = n^{1/2}$  verkleinert.



**Abb 22:**  
**Ein Quadrat, unterteilt in  $n=9$  gleichgroße Teilquadrate**

Analoges gilt für einen Würfel. Hierbei sind die entstehenden kleineren Würfel um den Faktor  $\sqrt[3]{n} = n^{1/3}$  verkleinert.

Bei einer Dimension von  $d$  verkleinert sich also ein Teilobjekt um den Faktor  $\sqrt[d]{n} = n^{1/d}$ , wenn das „große Objekt“ in  $n$  gleiche Stücke zerlegt wird.

Wie sieht diese Dimension jetzt bei der Koch-Kurve aus?

Die Koch-Kurve lässt sich sehr schön in vier gleiche Teile zerlegen. Jedes dieser Teile entspricht der Original-Kurve um den Faktor 3 verkleinert.

An Hand der Definition der fraktalen Dimension gilt jetzt:

$$4^{1/d} = 3, \text{ oder } d = \log(4) / \log(3) \approx 1,26$$

Die fraktale Dimension der Schneeflockenkurve beträgt also ungefähr 1,26.

Auf diese Art und Weise lässt sich auch natürlichen Objekten wie Wolken ( $d = 2,35$ ) oder Gehirnen ( $d = 2,79$ ) eine fraktale Dimension zuweisen.

### 3. Benoit Mandelbrot und die Mandelbrotmenge



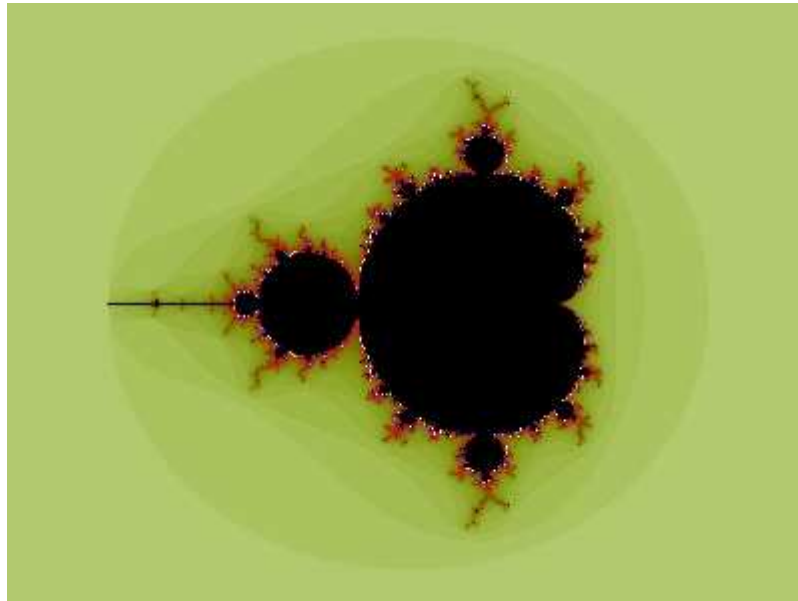
**Abb. 23**

**Benoit Mandelbrot, \* 1924**

Benoit Mandelbrot wurde 1924 in Polen geboren. Im Jahr 1936 emigrierte er mit seiner Familie nach Frankreich. Er trotzte seiner schlechten Schulausbildung – die Schule war wegen des zweiten Weltkriegs zu oft ausgefallen – und brachte sich viele Dinge selbst bei. Dadurch gewann er einen sehr speziellen Zugang zur Mathematik, der stark geometrisch geprägt war. 1958 verlegte Mandelbrot seinen Wohnsitz in die USA.

Mandelbrot forschte dort unter anderem im Watson Research Center von IBM, arbeitete an einer grafischen Darstellung einer Julia-Menge mit Hilfe eines Computers. Für diese Visualisierung schrieb er eines der ersten Computerprogramme, das in der Lage war, Grafiken darzustellen. Das Ergebnis seiner Arbeit veröffentlichte er in den Büchern „Les objets fractal: form, hasard et dimension“ (1975) und „The fractal geometry of nature“ (1982).

Bei seinen Forschungen stieß Mandelbrot auf ein weiteres Fraktal : Die Mandelbrotmenge – ihres Aussehens nach auch Apfelmännchen genannt:



**Abb. 24**  
**Die Mandelbrotmenge**

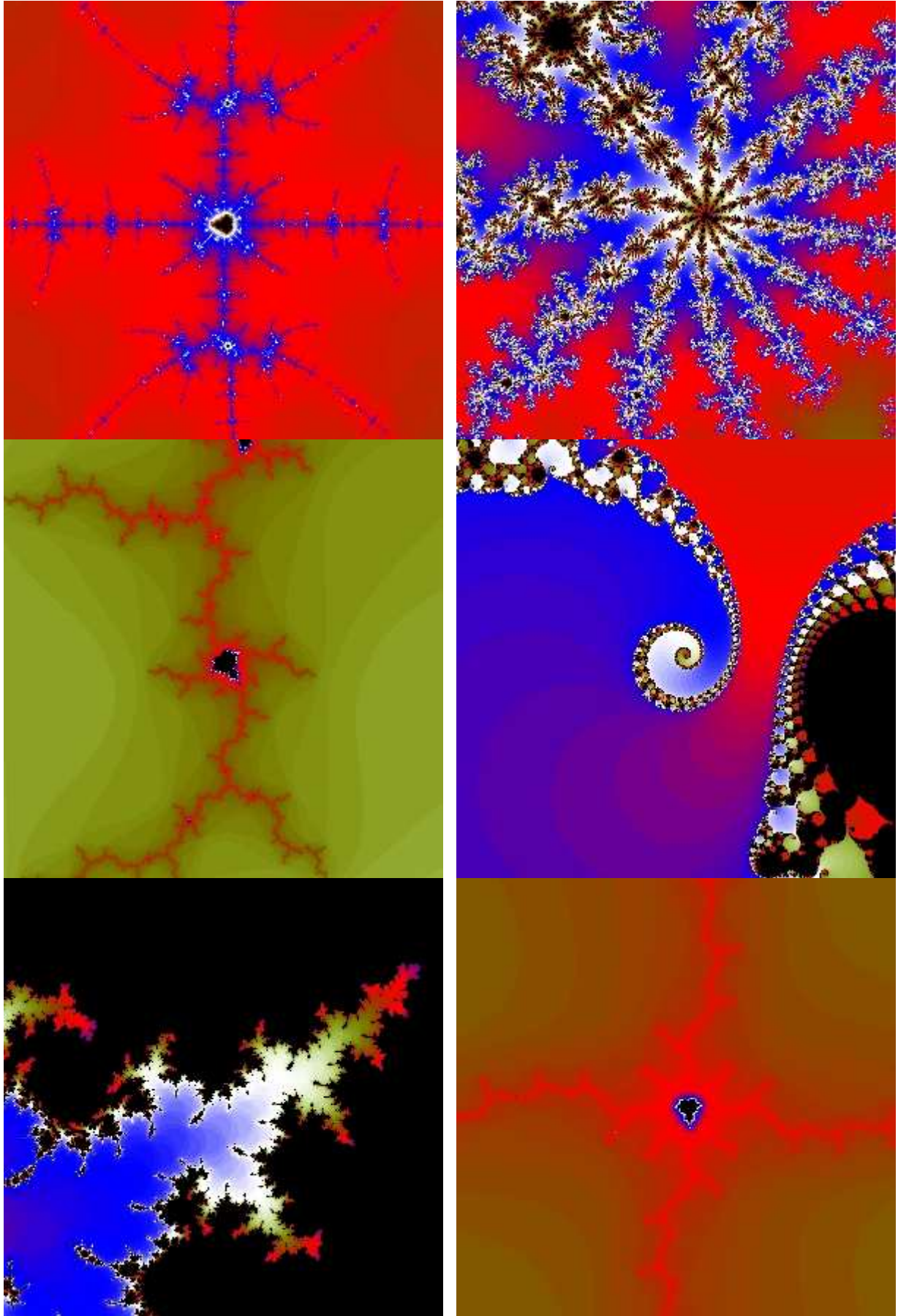
Die Mandelbrotmenge ist ähnlich definiert wie die Julia-Mengen, nämlich als die Menge aller komplexen Zahlen  $c$ , für welche die Iteration  $(z_n)$  mit  $z_{n+1} = z_n + c$ ,  $z_0 = 0$  stets beschränkt bleibt:

$$M := \{ c \in \mathbb{C} : (z_n) < \infty \text{ mit } z_{n+1} = z_n + c \}$$

In Flohsprache:

Man setze einen Floh auf einen Punkt  $c$  des Tisches. Der Floh merke sich diesen Abstand zum Ursprung und springe jetzt wieder so, dass sein neuer Abstand vom Ursprung das Quadrat des alten Abstands sei und dass sich der Winkel zwischen ihm, der X-Achse und dem Ursprung verdopple. Anschließend springe er noch um den Betrag zur Seite, den er sich am Anfang gemerkt hat. Alle (Start-)Punkte des Tisches, von denen aus die Flöhe bei ihren Sprüngen stets auf dem Tisch verbleiben, gehören zur Mandelbrotmenge, alle anderen nicht.

Im Gegensatz zu unendlich vielen Julia-Mengen, existiert nur eine einzige Mandelbrotmenge. Beim hineinzoomen in die Mandelbrotmenge fallen immer wieder Bereiche auf, die wie das Original auszusehen scheinen. Trotzdem ist die Mandelbrotmenge nicht selbstähnlich, weil doch immer kleinere Abweichungen vom Original vorhanden sind.



**Abb. 25–30:**  
**Verschiedene Ausschnitte der Mandelbrotmenge**

#### 4. Zusammenhang zwischen Julia- und Mandelbrotmengen

Wie schon in ersten Abschnitt beschrieben, gibt es unendlich viele Julia-Mengen, eine zu jeder komplexen Zahl  $c$ . Doch viele Julia-Mengen enthalten keine Punkte, entsprechen also schlichtweg der leeren Menge. Für welche Zahlen  $c$  existiert also eine „richtige“, nicht - leere Juliamenge?

Bei der Betrachtung verschiedener Ausschnitte der Mandelbrotmenge fallen immer wieder Teilmengen der Mandelbrotmenge auf, die starke Ähnlichkeit mit einer Juliamenge haben – was auch nicht erstaunlich ist, sind die Iterationsgleichungen für beide Mengen doch sehr ähnlich. Tatsächlich ähnelt die Mandelbrotmenge in einem Ausschnitt um einen Punkt  $c \in M$  der Juliamenge  $J(c)$ , was ich an einigen Bildbeispielen verdeutlichen möchte:

Ausschnitt der Mandelbrotmenge  
in der Umgebung von Punkt  $c$

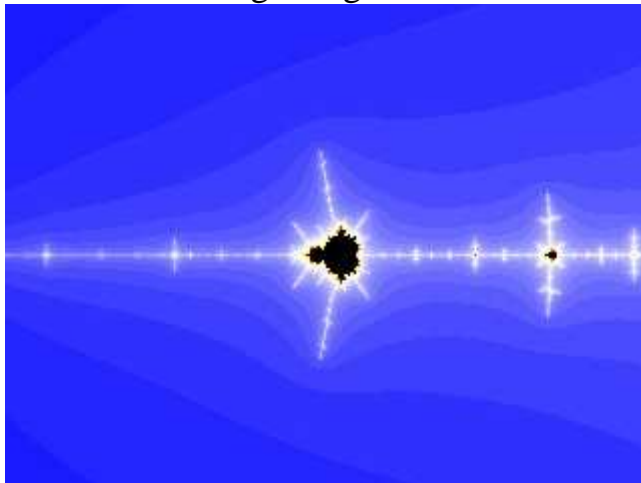


Abb. 31 :  $c = -1.77 + 0.0067i$

korrespondierende Julia-Menge  $J(c)$

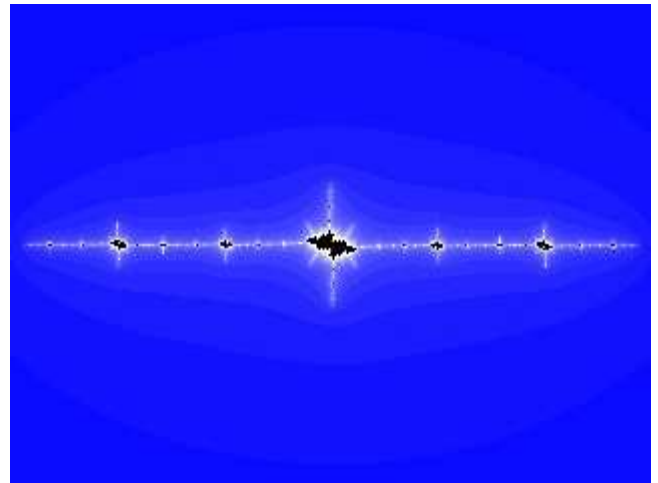


Abb. 32

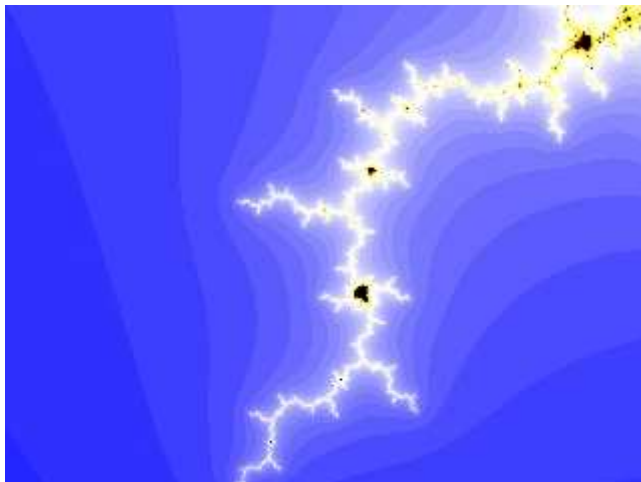


Abb. 33 :  $c = -1.267 - 0.367i$

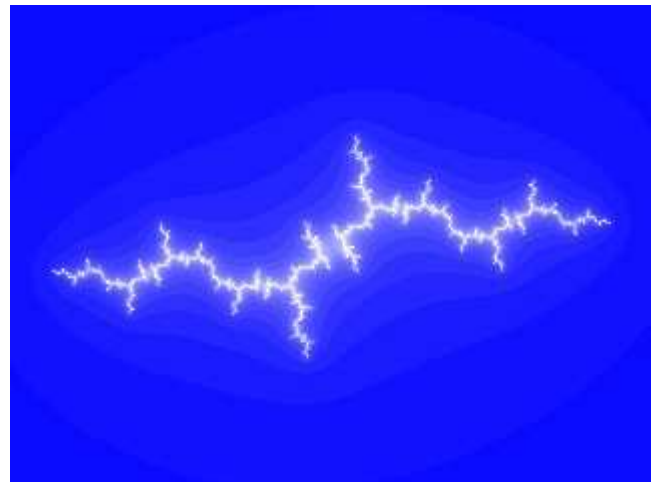


Abb. 34

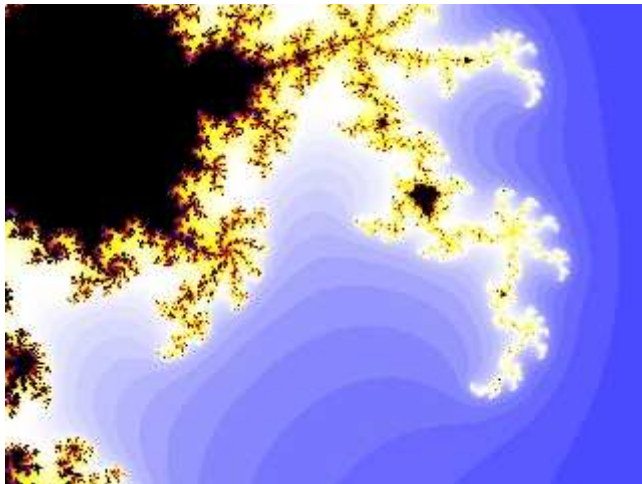


Abb. 35 :  $c = 0.42 - 0.233i$

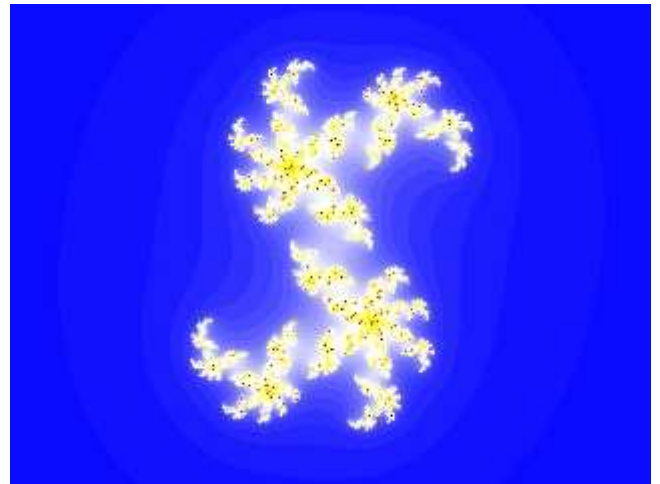


Abb. 36

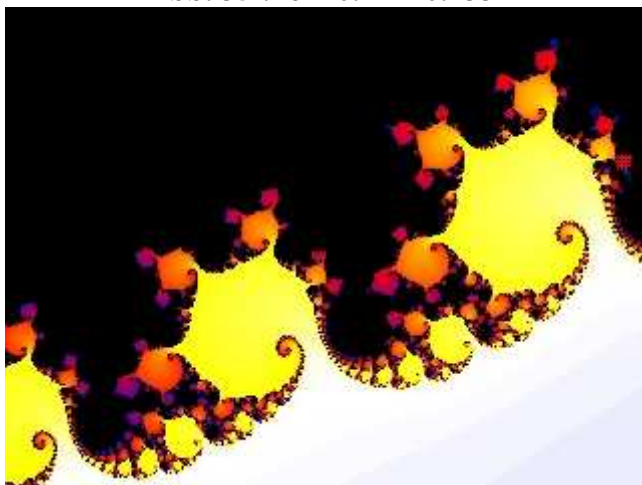


Abb. 37 :  $c = 0.273 + 0.0067i$

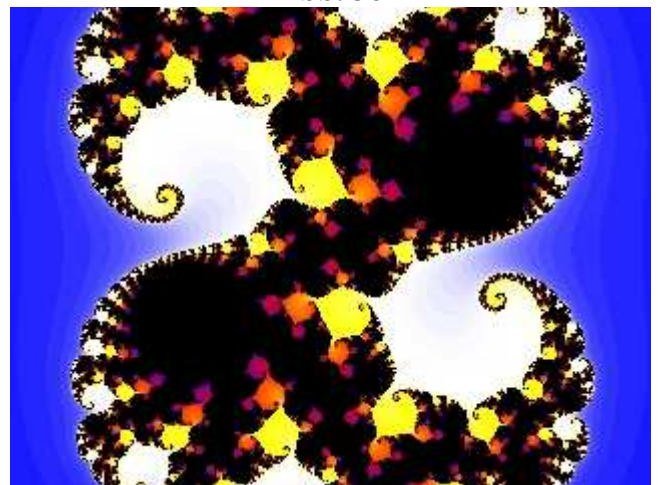


Abb. 38



Abb. 39 :  $c = -0.7712583 + 0.11564479167i$

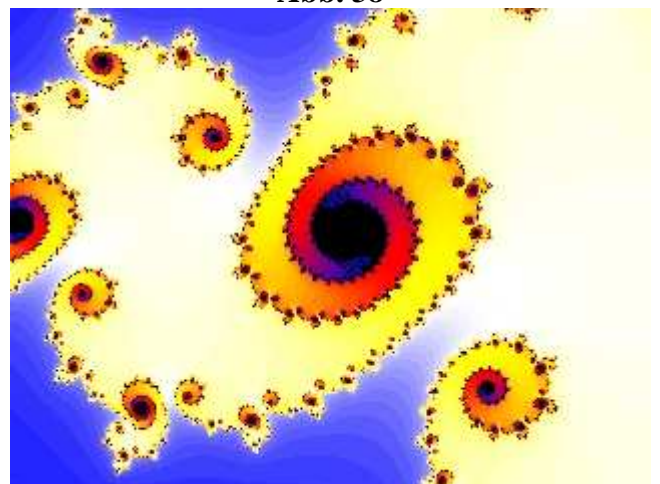


Abb. 40

Diese Beispiele legen folgenden Fakt nahe:

Eine Juliamenge zur Zahl  $c \in \mathbb{C}$  ist genau nicht - leer, wenn der Punkt  $c$  in der Mandelbrotmenge liegt:

$$J(c) \neq \emptyset \Leftrightarrow c \in M$$

## Quellenangabe

Alle Darstellungen der Mandelbrot- und Juliamengen habe ich mit der Shareware UltraFractal 2.05 erstellt: [www.ultrafractal.com](http://www.ultrafractal.com)

weitere Bildquellen:

Abb 1: Gaston Maurice Julia	<a href="http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/gaston.gif">http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/gaston.gif</a>
Abb. 23 Benoit Mandelbrot	<a href="http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Mandelbrot.html">http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Mandelbrot.html</a>
Abb. 18 Farnblatt	<a href="http://www.biko.unibe.ch/images/farn.jpg">http://www.biko.unibe.ch/images/farn.jpg</a>
Abb. 19 Küstenlinien	<a href="http://www-users.rwth-aachen.de/niko.wilbert/frac/length.jpg">http://www-users.rwth-aachen.de/niko.wilbert/frac/length.jpg</a>
Abb. 20 Iterationsstufen der Koch-Kurve	<a href="http://www.informatik.uni-oldenburg.de/~zoomie/fractal/frackoch.html">http://www.informatik.uni-oldenburg.de/~zoomie/fractal/frackoch.html</a>

Internet-Quellen:

Titel und URL	Thema
„Fraktale“ <a href="http://www.ev-stift-gymn.guetersloh.de/uforum/physik-lk-12-1997-1998/fraktale/">http://www.ev-stift-gymn.guetersloh.de/uforum/physik-lk-12-1997-1998/fraktale/</a>	gebrochene Dimension, Selbstähnlichkeit
„Benoit Mandelbrot“ <a href="http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/benoit.htm">http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/benoit.htm</a>	Benoit Mandelbrot
„Mandelbrot“ <a href="http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Mandelbrot.html">http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Mandelbrot.html</a>	
„Die Mandelbrot-Menge“ <a href="http://segfault.net/~scut/articles/frac/mandel.html">http://segfault.net/~scut/articles/frac/mandel.html</a>	Mandelbrotmenge Juliamengen
„Fractal World“ <a href="http://www.informatik.uni-oldenburg.de/~zoomie/fractal/fractal.html">http://www.informatik.uni-oldenburg.de/~zoomie/fractal/fractal.html</a>	Koch-Kurve Mandelbrotmenge Juliamenge
„Gaston Maurice Julia“ <a href="http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/gaston.htm">http://www.katharinen.ingolstadt.de/chaos/gaston.htm</a>	Gaston Maurice Julia
„Julia“ <a href="http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Julia.html">http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Julia.html</a>	
„MJ's Fraktal-Website“ <a href="http://www.jaggi.ch/informatics/fractals/index_d.html">http://www.jaggi.ch/informatics/fractals/index_d.html</a>	Algorithmus zur Berechnung von Mandelbrot- / Juliamengen
„Fraktale – Mandelbrot“ <a href="http://sebfisch.de/fraktale/index.html">http://sebfisch.de/fraktale/index.html</a>	Mandelbrot- und Juliamengen

Buch-Quelle:

Foley, Kapitel 9.5.1 : Fraktale Modelle