RADIOSITY

Universität Ulm **Proseminar Computergrafik 2002**

Matthias Röhm

Inhaltsverzeichnis

1. Was ist Radiosity?

Das Radiosityverfahren (Strahlungsaustauschverfahren) wurde aus der Thermodynamik abgeleitet. Dort wurde ein Verfahren entwickelt, um die Wärmestrahlung zwischen Oberflächen in einer abgeschlossenen Umgebung zu berechnen. Durch vertauschen der Wärmenergie mit der Lichtenergie wurde das Verfahren auf die Computergrafik übertragen.
Da die Strahlung zwischen allen Oberflächen berechnet wird, ist die Anzahl und die Position der Lichtquellen kein limitierender Faktor.
Das Verfahren eignet sich dadurch besonders für Szenen mit ausgedehnten Lichtquellen und komplexen Schatten.

2. Einige Voraussetzungen

Das Radiosityverfahren soll uns möglichst fotorealistische Bilder liefern. Würden wir deshalb die absolut korrekten physikalischen Eigenschaften einer Szene für die Berechnung benutzten, würde dies den Rahmen jeder Rechenleistung sprengen. Deshalb versucht man durch Vereinfachungen den Rechenaufwand zu minimieren, ohne jedoch die detailgetreue Darstellung zu vernachlässigen.
Die Vereinfachungen im einzelnen:

- Alle Oberflächen reflektieren und / oder strahlen Licht perfekt diffus. Also können alle Flächenstücke Lichtquelle und / oder Spiegel sein. „Diffus“ bedeutet, dass die Intensität des Lichtes unabhängig von Betrachterstandpunkt ist).

- Die Umgebung ist abgeschlossen(d.h.: Es wird keine Energie zu- oder abgeführt).

- Die Flächeneigenschaften und die Anordnung aller Gegenstände ist zeitlich konstant (d.h.: Es bewegt sich nichts).

- Die Oberflächen aller Gegenstände werden in kleine Flächenstücke aufgeteilt. Die Flächenstücke sind eben und das ganze Flächenstück hat die gleichen Flächeneigenschaften (z.B.: pro Flächeneinheit ist die abgestrahlte Energie im Flächenstück konstant).

3. Das Berechnungsverfahren

3.1 Grundlegende Begriffe für das Berechnungsverfahren

Um die Energie, die zwischen den einzelnen Flächenstücken ausgetauscht wird zu berechnen, benötigt man eine nicht ganz einfache Formel. Nun sollen aber zuerst einmal die Begriffe erläutert werden, die während des Berechnungsverfahrens benötigt werden:

A_i – Flächeninhalt des Flächenstücks A_i

B_i – gesamte Energiedichte (also: reflektierte und abgestrahlte Energie von A_i)

E_i – abgestrahlte Energiedichte von A_i

p_i – Reflexionskoeffizient: Wie viel des eingestrahlten Lichts wird reflektiert. Es gilt $0 \leq p_i \leq 1$

F_{ij} – Formfaktor: Der Anteil der Energie die das Flächenstück i abgibt und die beim Flächenstück j ankommt.

$$F_{ij} = \frac{\text{Energie, die Flächenstück i verlässt und Flächenstück j erreicht}}{\text{Energie, die Flächenstück i verlässt}}$$

Die Formfaktoren hängen ausschließlich von der Anordnung der Gegenstände (der Geometrie) einer Szene ab. Wichtig ist, dass auch Verdeckungen beachtet werden müssen.
Die Formfaktormatrix F stellt die Formfaktorabhängigkeit zwischen allen n Flächenstücken dar.

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} \; F_{12} \; \ldots \; F_{1n} \\ F_{21} \; F_{22} \; \ldots \; F_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n1} \; F_{n2} \; \ldots \; F_{nn} \end{pmatrix}$$

3.2 Die Radiositygleichung

Der Ansatz des Radiosityverfahrens bezieht sich wie oben gesagt auf ein Berechnungsverfahren für den Wärmeaustausch zwischen Oberflächen. In Anlehnung an dieses Verfahren wurde eine Gleichung für den Strahlungsaustausch entwickelt. Als erstes und wichtigstes wird die Strahlungsenergie von jedem Flächenstück benötigt. Also die Energie die ein Flächenstück von der Umgebung erhält plus die Energie die es selbst erzeugt.

Energie, die eine Fläche abgibt

B = abgestrahlte Energie + reflektierte Energie

Die reflektierte Energie erhält man durch Multiplikation des Reflexionskoeffizienten mit der Energie, die das Flächenstück von der Umgebung aufnimmt.

$$\Rightarrow B_i dA_i = E_i dA_i + p_i \int_{Umgebung} F dA_j \, dA_i \, B_j dA_j$$

Da durch die oben erwähnten Vorrausetzungen die Energiedichten und die Reflexionskoeffizienten der Flächenstücke konstant sind, folgt:

$$\Rightarrow B_i A_i = E_i A_i + p_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij} B_j A_j \quad \text{division durch } A_i \text{ ergibt}$$

$$\Rightarrow B_i = E_i + p_i \sum_{j=1}^{n} F_{ji} B_j A_j / A_i$$

Diese Gleichung muss prinzipiell für jedes Flächenstück A_i berechnet werden. Der größte Aufwand entsteht bei der Berechnung der Formfaktoren F_{ji}.

Ich werde eine analytische Formel vorstellen, die jedoch im Allgemeinen nicht zum Einsatz kommt, da sie viel zu rechenintensiv ist.

3.3 Berechnung der Formfaktoren

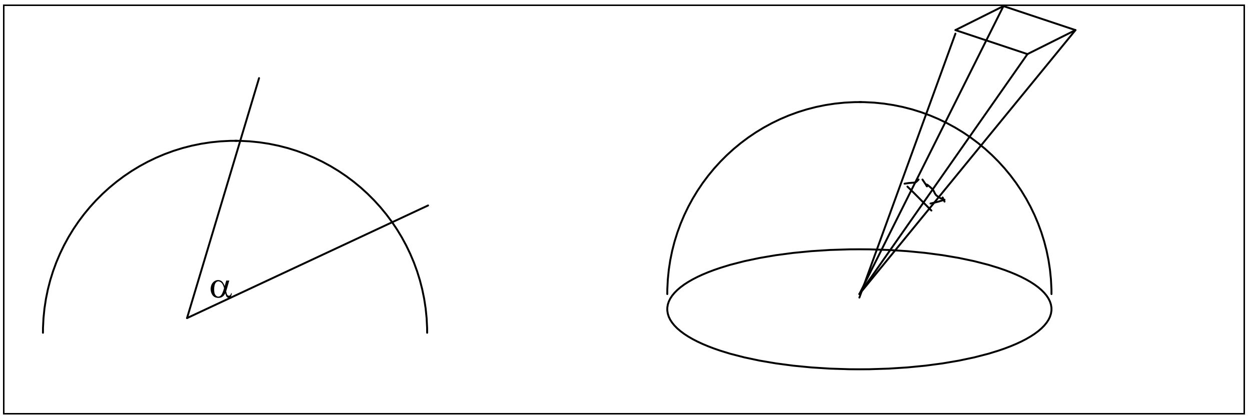
Die Berechnung der Formfaktoren ist der komplizierteste und rechenintensivste Teil des Radiosityverfahrens. Wie oben erwähnt repräsentiert der Formfaktor F_{ij} die Energiebeziehung zwischen den Flächenstücken A_i und A_j. Um die komplette Energie eines Flächenstücks berechnen zu können, braucht man alle Formfaktorbeziehung.
Um eine Szene gut darstellen zu können, benötigt man viele Flächenstücke, je mehr desto besser. Aber je mehr Flächenstücke zur Darstellung der Szene benutzt werden, desto höher wird der Aufwand des Rechenverfahrens. Denn angenommen wir benutzten zur Darstellung unserer Szene **n** Flächenstücke, so müssen wir zur Berechnung der Energie eines Flächenstücks **n-1** Formfaktoren bestimmen. Also brauchen wir insgesamt, **n(n-1)** oder **O(n²)**, Formfaktoren!

Um nun die Formfaktoren berechnen zu können müssen wir wissen wie viel Energie von einem Flächenstück A_i bei Flächenstück A_j ankommt. Das ganze Flächenstück zur Berechnung der Energieabgabe zu benutzten wäre sehr kompliziert, deshalb wird zuerst nur ein Punkt benutzt, am einfachsten natürlich der Mittelpunkt. Um die Energieabgabe eines Punktes zu bestimmen, reicht es, eine Kugel um diesen zu legen, wobei die Kugeloberfläche die Energie darstellt. Da beim Radiosity ja keine 2D sondern 3D Objekte dargestellt werden sollen, ist der untere Teil der Kugel überflüssig (Es wird ja nicht in den Gegenstand hineingeleuchtet). Also ist die gesamte Energie auf der oberen Halbkugel verteilt.

Gesamte Energie, die dA_i verlässt ist auf $2\pi r^2$ (Oberfläche der Halbkugel) verteilt.

Will man also die Energie in eine bestimmte Richtung berechnen, muss man wissen, welcher Anteil der Kugeloberfläche dem entsprechenden Flächenstück zugeordnet ist.

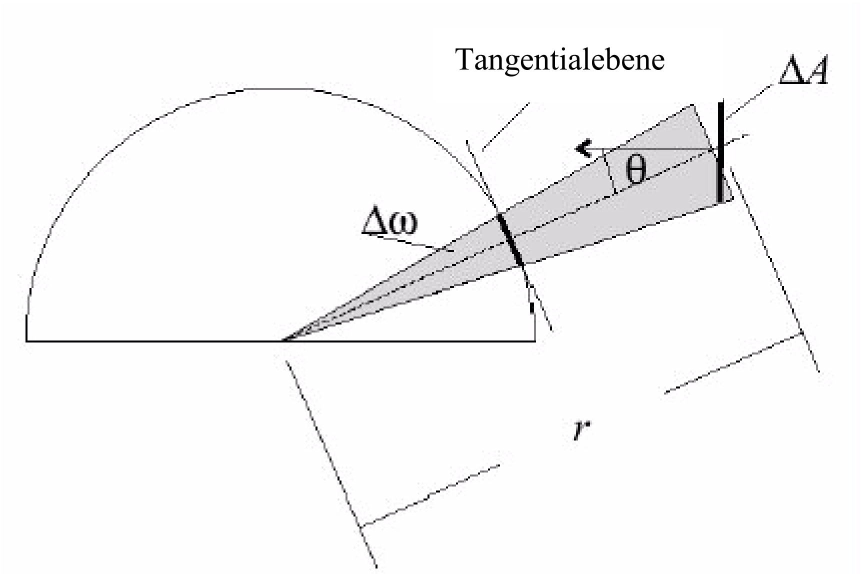
3.3.1 Raumwinkel



Zur Berechnung der Formfaktoren benötigen wir unter anderem den Raumwinkel. Unter einem Raumwinkel versteht man den Quotienten aus dem Flächeninhalt eines Teilstücks einer Kugeloberfläche A und dem Quadrat des zugehörigen Kugelradius r. Da die ganze Kugeloberfläche den Flächeninhalt $4\pi r^2$ besitzt, ist der zugehörige volle Raumwinkel $4\pi r^2/r^2 = 4\pi$. Um den Wert eines Raumwinkels von dem eines ebenen Winkels unterscheiden zu können, fügt man dem Wert des Raumwinkels noch die Einheit sr (Steradiant) an. Der volle Raumwinkel beträgt folglich 4π sr. Für eine Halbkugel gilt beispielsweise $\omega=2\pi$ sr .

Um den Raumwinkel mathematisch genau ermitteln zu können, müsste man komplexe Berechnungen durchführen. Einfacher ist es jedoch, nicht den exakten Wert zu berechen, sondern diesen lediglich zu approximieren.

3.3.2 Approximation des Raumwinkels



Durch Projektion von ΔA auf die Tangentialebene erhalten wir eine Approximation für den Raumwinkel, denn es gilt:

1. $d\omega = (dA \cos\theta)/r^2$ (Der cos entspricht der Orientierung von dA)

Oder Ausgedrückt in Längen-(ψ) und Breitengrad (Φ):

2. $d\omega = \sin\Phi \, d\Phi d\psi$

Mithilfe des Raumwinkels können wir nun die Energie bestimmen der dA verlässt.
Die durch die Vereinfachungen entstandenen Eigenschaften der Flächenstücke und der ganzen Szene werden nun eingesetzt, um die Formel zu vervollständigen.

Die von einem Flächenstück abgegebene Energie ist proportional zur Intensität *I* und zur Größe des Flächenstücks A. Da das Radiosityverfahren ausschließlich ideal diffuse Oberflächen behandelt, (siehe oben) ist die Intensität *I* des reflektierten und emittierten Lichts unabhängig vom Standpunkt des Beobachters. Jedoch ist die abgestrahlte Energie richtungsabhängig.

3.3.3 Energieberechnung zwischen zwei Flächen

Somit ergibt sich für die Fläche A, die Energie in eine bestimmte Richtung abgibt, folgende Gleichung:

$$I \cos\Phi \, d\omega \, dA$$

Um die gesamte Energie (in alle Richtungen), die von dA abgestrahlt wird, zu ermitteln, muss bezüglich ω über eine Halbkugel integriert werden:

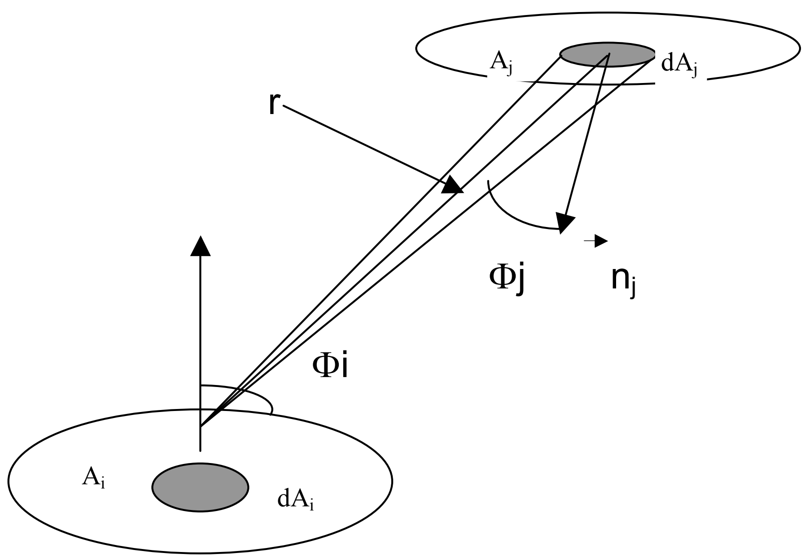
$\int_{Halbkugel} I \cos\Phi \, dA \, d\omega$

$= I \, dA \int_{Halbkugel} \cos\Phi \, d\omega$ (Da I richtungsunabhängig ist.)

Für $d\omega$ die 2. Formel einsetzten.

$= I \, dA \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos\Phi \sin\Phi \, d\Phi d\psi$

$= \pi \, I \, dA$ (Gesamte Energie die dA abgibt!)



Die Formfaktormatrix beinhaltet, wie oben gesagt, alle Formfaktorabhängigkeiten. Um diese zu berechnen, müssen wir wissen, welcher Anteil der Energie von einem Flächenstück dA_i bei einem anderen Flächenstück dA_j ankommt. Durch Einsatz der oben gezeigten Formeln erhalten wir folgendes:

$$= I_i \cos\Phi \, d\omega \, dA_i = \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j}{r^2} \, dA_i \, dA_j \, I_i$$

Dies ist die Energie, die dA_i verlässt und dA_j erreicht.
Will man nun die Energie, die dA_i verlässt und A_j erreicht, dann muss man noch über A_j integrieren:

$$\int_{Aj} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j}{r^2} \, dA_i \, dA_j \, I_i$$

Als letztes noch die Energie, die A_i verlässt A_j und erreicht:

$$3. \quad \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j}{r^2} \, dA_i \, dA_j \, I_i$$

3.3.4 Die Formfaktorgleichung

Der Formfaktor ist definiert als der Anteil der vom Flächenstück A_i abgegebenen Energie die Flächenstück A_j erreicht. Somit muss Gleichung 3. noch durch die Gesamtenergie von A_i geteilt werden. Die Gesamtenergie erhalten wir durch Integration der oben genannten Formel:

$$\int_{A_i} \pi \, I_i \, dA_i = \pi \, I_i \, A_i$$

Somit ist der Formfaktor:

$$F_{ij} = \frac{I_i \int_{Ai} \int_{Aj} (\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_i \, dA_j) / r^2}{\pi \, I_i \, A_i}$$

$$= \frac{1}{A_i} \int_{A_i}\int_{A_j} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_i \, dA_j}{r^2 \pi}$$

Oder der Formfaktor der diskreten Flächen dA_i und dA_j :

$$F_{dAi\,dAj} = \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_j}{r^2 \pi}$$

,oder der Flächen dA_i und A_j :

$$F_{dAi\,Aj} = \int_{A_j} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_j}{r^2 \pi}$$

Bis jetzt wurden die beiden Flächenstücke allein betrachtet, jedoch ist es möglich, dass andere Flächenstücke zwischen Ai und A_j liegen. Um dies in die Formel zu berücksichtigen wird ein Faktor HID_{ij} zu dem Integranden hinzugefügt. HID_{ij} nimmt nur die Werte 1 und 0 an, je nachdem ob dA_j von dA_i aus sichtbar ist oder nicht.

$$= \frac{1}{A_i} \int_{A_i}\int_{Aj} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, HID_{ij} \, dA_i \, dA_j}{r^2 \pi}$$

Aus dieser Formel ergeben sich die Eigenschaften der Formfaktoren:

Durch vertauschen der Indizes i, j erhält man den Formfaktor F_{ji}

Ebenso kann man die Fläche A auch in mehrere Teilflächen Aq (q=1,2,3......n) aufteilen, dies ergibt dann folgendes:

$$A_i F_{ij} = \sum_q \int_{A_q} \int_{Aj} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, HID_{ij} \, dA_q \, dA_j}{r^2 \pi}$$

oder:

$$F_{ij} = \frac{1}{A} \sum_q A_q F_{qj}$$

(Wird das sendende Flächenstück unterteilt, müssen die Ff. mit den Flächeninhalten gewichtet werden.)

Daraus folgt dann noch:

$$A_j F_{ji} = \sum_q A_j F_{jq} = \sum_q F_{jq}$$

$$\Rightarrow F_{ji} = \sum_q F_{jq}$$

(wenn das empfangende Flächenstück unterteilt wird dürfen die Teilformfaktoren zum Gesamtformfaktor einfach zusammenaddiert werden.)

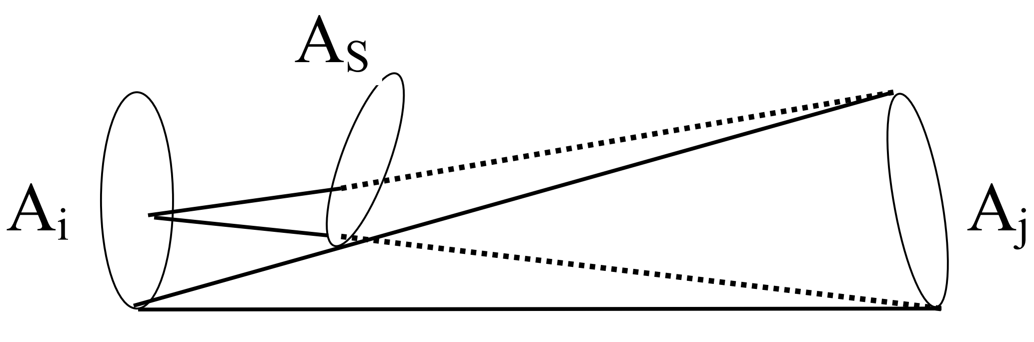
Aus der Formfaktordefinition folgt außerdem noch $0 \leq F_{ij} \leq 1$, $F_{ii} = 0$ und $F_{jq} = 1$.

(tritt aber fast nie ein da nie ganz genau)

3.3.5 Die Formfaktornäherung (Halbkugelverfahren)

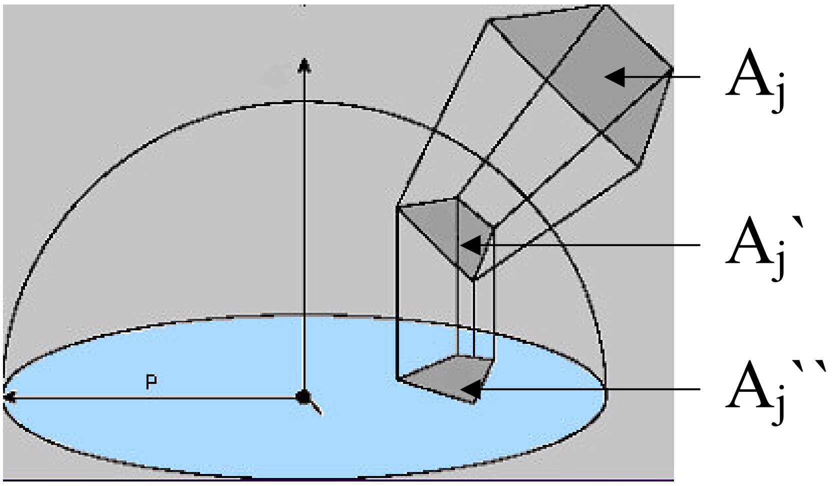
Man geht davon aus, dass der Abstand der Flächenstücke sehr groß ist im Vergleich zu ihrer Größe. Dann variieren Φ_i, Φ_j und r kaum noch A_i und A_j. Die Integration über eine der beiden Flächen in F_{ij} kann so durch Multiplikation mit der zu integrierenden Fläche approximiert werden. Somit kann der Formfaktor F_{ij} oft durch $F_{dAi\ Aj}$ ersetzt werden.

Diese Näherung ist, wie gesagt, in den meisten Fällen ausreichend. Probleme treten dann auf, wenn zwischen den Flächenstücken A_i und A_j ein anderes Flächenstück S liegt. Dann stimmt die Lösung des Nährungsverfahrens nicht mehr. Dies macht folgendes Beispiel klar:



A_j wird im Mittelpunkt von A_i durch A_s verdeckt, aber am Rand ist A_j weiterhin sichtbar somit ist die Nährung dA_i=MA_i (Mittelpunkt von A_i) falsch.

Die Formfaktornäherung kann folgendermaßen gedeutet werden:



Projiziert man A_j zentral auf die Halbkugel über dA_i mit Radius p so erhält man $A`_j$, eine weiter Projektion von $A`_j$ auf die Grundfläche der Halbkugel erzeugt $A``_j$.
Es gilt:

$$dA`_j = \frac{p^2 \cos\Phi \, dA_j}{r^2}$$

$$dA_j`` = \cos\Phi_i \, dA`_j = \frac{p^2 \cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_j}{r^2}$$

und durch Integration erhalten wir:

$$A_j`` = p^2 \int_{Aj} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_j}{r^2}$$

$A_j``$ ist also der Anteil der Grundfläche der Halbkugel

3.3.6 Halbwürfelverfahren

Es wird die Gleiche Näherung $F_{dAi\ Aj} \approx F_{ij}$ wie bei dem Halbkugelverfahren verwendet. Es werden alle Flächenstücke der Umgebung auf den Halbwürfel um dAi projiziert. Bei gegenseitigen Verdeckungen ist darauf zu achten, dass das nähere Flächenstück für die Projektion verwendet wird. Diese Vorgehensweise entspricht dem HID Faktor aus der ursprünglichen Formel.

Um die Methode noch weiter zu vereinfachen, wird der Halbwürfel gerastert, dh. in Pixel aufgeteilt. Nun werden jedem Flächenstück Pixel auf dem Halbwürfel zugeordnet. Nachdem dies geschehen ist, sollte jedes Pixel einem Flächenstück zugeordnet sein. Dies ist jedoch nicht immer der Fall, denn es können, gegen die Vorrausetzungen, auch nicht abgeschlossene Umgebungen betrachtet werden. Dann müssen die Pixel die keinem Flächenstück zugeordnet sind, künstlich schwarz markiert werden.

Für die Berechnung dienen folgende Formeln:

$$F_{ij} \approx F_{dAi\ Aj} = \int_{Aj} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA_j}{r^2 \pi}$$

$$= \int_{\mathbf{A`j}} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, dA`_j}{r^2 \pi}$$

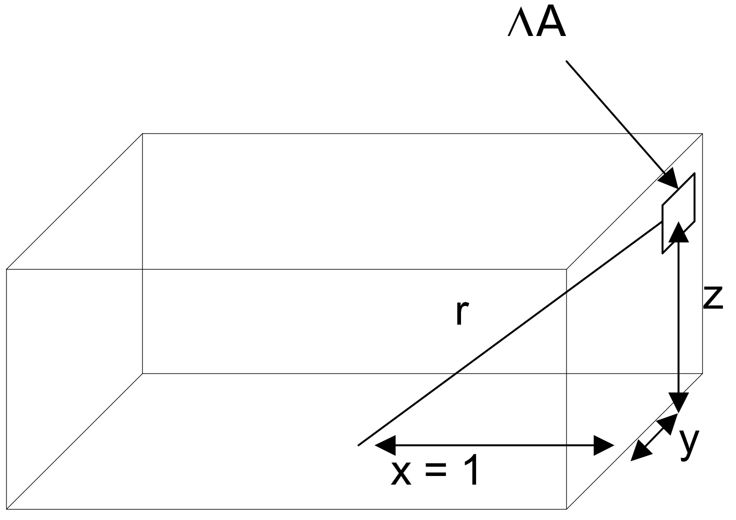
$$\approx \sum_{\mathbf{p}} \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \, \Delta A}{r^2 \pi}$$

$$=: \sum_{\mathbf{p}} \Delta F_p$$

Wobei A_j` die exakte Projektion von A_j auf den Halbwürfel ist, und p die Indizes der Pixel die A_j zugeordnet sind.

Also kann man den Formfaktor für einen Pixel wie folgt berechnen:

$$\Delta F_p = \frac{\cos\Phi_i \cos\Phi_j \Delta A}{r^2 \pi}$$



Anstatt der Kosinus-Schreibweise kann man auch die (hier) einfachere Pythagoras Formel verwenden. Dann gilt für jeden Pixel auf dem Halbwürfel:

$$\Delta F_p = \frac{z}{p(x^2+y^2+z^2)^2 \Delta A}$$

Das Halbwürfelverfahren ermöglicht eine relativ einfache Berechnung der Formfaktoren, jedoch ist es immer noch sehr aufwendig, alle Formfaktoren zu berechnen. Es muss also noch ein Weg gefunden werden, wie die Anzahl der Formfaktoren verringert werden kann. Im letzten Abschnitt wird eine Möglichkeit dazu gezeigt.

3.4 Klassisches Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems

Nachdem alle Formfaktoren berechnet sind, kann mit dem Lösen der Radiositygleichung begonnen werden.

$$B_i = E_i + p_i \sum_{j=1}^{n} (A_j/A_i)\, F_{ji}\, B_j$$

$$= E_i + p_i \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, B_j$$

oder

$$\vec{B} = \vec{E} + R\, F\, \vec{B}$$

Mit $R = \mathrm{diag}(p_1, p_2, p_3 \ldots p_n)$

Dies ausgeschrieben ergibt in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} 1-\rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1-\rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1-\rho_n F_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{e1} \\ B_{e2} \\ \vdots \\ B_{en} \end{pmatrix}$$

Durch die Berechnung der Formfaktoren und den anderen notwendigen Variablen ergibt sich oben gezeigtes Gleichungssystem.
Da die Lösbarkeit des Gleichungssystems sichergestellt ist, können zur Lösung iterative Verfahren wie Jacobi- oder das Gaußverfahren genutzt werden, auf die hier nicht genauer eingegangen wird.

4. Schematischer Aufbau des Verfahrens

Ändern der Geometrie

↓

Berechnung der Formfaktoren

↓

Ändern der Emission und der Reflexionskoeffizienten

↓

Lösen des Gleichungssystems für verschieden Wellenlängen

↓

Direkte Darstellung

↓

Darstellung mit Gouraud-Schattierungsverfahren

Nach dem Gestaltung der Szene werden zuerst die Formfaktoren berechnet, da diese eben nur von der Geometrie abhängig sind. Somit müssen die Formfaktoren nur erneut berechnet werden wenn die Geometrie der Szene geändert werden soll.

Nun werden die Emissionen und Reflexionskoeffizienten der einzelnen Flächenstücke festgelegt und mithilfe des oben genannten Gleichungssystems gelöst. Dies muss jedoch für verschiedene Wellenlängen (entspricht den Farben) getan werden, will man ein farbiges Ergebnis.
Somit muss bei Änderungen der Beleuchtung und der Flächeneigenschaften erneut das Gleichungssystem gelöst werden.

Die entstandene Darstellung ist noch etwas eckig und wirkt noch nicht sehr gut, deshalb kommt meistens noch ein Schattierungsverfahren zum Einsatz. Z.B. das Gouraud-Schattierungsverfahren

5. Optimierung des Verfahrens durch adaptive Flächenunterteilung

Die Flächenstücke sind nicht überall gleich groß. An Stellen, wo sich die Strahlungswerte stark ändern, wird das Flächenstücke in kleinere Unter-Flächenstücke aufgeteilt. Für diese Teil-Flächenstücke müssen natürlich auch neue Formfaktoren berechnet werden.

Algorithmus

Adaptive Unterteilung der Facetten an Stellen, an denen sich stark ändernde Strahlungswerte gefunden werden.
Die Unterfacetten werden anders als die ursprünglichen Facetten behandelt:

• berechne die Formfaktoren $F_{s\text{-}j}$ von jeder Unterfacette *s* zu jeder ursprünglichen Facette *j* (die umgekehrten Formfaktoren werden nicht berechnet)

• ersetze den Formfaktor $F_{i\text{-}j}$ durch den genaueren Wert

$$F_{ij} = \left(\sum F_{sj} A_s \right) / A_i$$

• berechne die Strahlungswerte B_i der ursprünglichen Facetten nach dem üblichen Verfahren

• berechne die Strahlungswerte jeder Teilfacette *s* von *i* durch

$$B_s = E_i + p \sum F_{sj} B_j$$

•falls es noch Strahlungswerte gibt, die sich stark unterscheiden, iteriere das Verfahren.

6. Zusammenfassung

Radiosity ist ein aufwendiges, aber dafür sehr detailgetreues Verfahren um photorealistische Computergrafiken zu entwerfen.
Hier noch einmal die wichtigsten Eigenschaften des Strahlungsaustauschverfahrens

- Für statische Szenen mit komplexer Beleuchtung
- Sehr hohe Bildqualität möglich
- Jedoch aufwendiges Berechnungsverfahren
- Formfaktorberechnung aufwendigster Teil, z.B mittels Halbwürfelverfahren

7. Quellen:

-Skript von Prof. Dr. Heinrich Müller
(http://ls7-www.cs.uni-dortmund.de/students/lectures/grsys0102/SkriptErgaenzung/)
-Radiosity Vorlesung von S. Schäfer, D. Fellner
(http://www.cg.cs.tu-bs.de/lvcg01-02/Vorlesung1/)
-Dipl. Arbeit von Monika Geppert
(www-m2.ma.tum.de/Forschungsprojekte/Sigma/Grafik/Radio/diplGeppert.ps)
-Dipl. Arbeit von Stefan Struck
(www.cg.cs.tu-bs.de/PubArc/dipl/struck98_dipl.pdf)
-Skript von Oliver Deussen
(http://www.inf.tu-dresden.de/ST2/cg/pdf_daten/Informatik/HS/cg3/)
-Bilder aus oben genannten Texten